





1. Si consideri il sistema lineare

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{cases}$$

1.1 Si mostri che il sistema non e' completamente raggiungibile.

1.2 Si metta il sistema in forma canonica di Kalman per la raggiungibilita'.

forma can. Kalman per la ragg.:

1.3 Si determini una forzante  $u(t)$  che porta lo stato dall'origine a  $\bar{x} = [2 \ 2]^T$  al tempo  $t = 1$ .

$$u(t) =$$

**2.** Un sistema nonlineare ha equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 &= -\mathbf{x}_1^3 - \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_1 + \frac{1}{8}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{x}_2^3 + \mathbf{u} \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \quad (2)$$

2.1 Si determini lo stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  del sistema associato alla forzante  $\bar{\mathbf{u}} = 8$ .

$$\bar{\mathbf{x}} =$$

2.2 Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato in un intorno di  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

sistema linearizzato:

2.3 Si dica se l'equilibrio  $\bar{x}$  e' asintoticamente stabile.

as. stabile: ☐ SI ☐ NO

2.4 Il sistema nonlineare e' inizialmente nello stato di equilibrio  $\bar{x}$  e adesso viene applicato l'ingresso  $u(t) = 8 + 0.1 \sin(10t)$ . In conseguenza a tale ingresso, l'uscita  $y(t)$  oscilla. Si determini un valore approssimato dell'ampiezza dell'oscillazione a regime.

ampiezza oscillazione  $\simeq$

3. Si vuole controllare la posizione  $p$  del carrello in figura. La

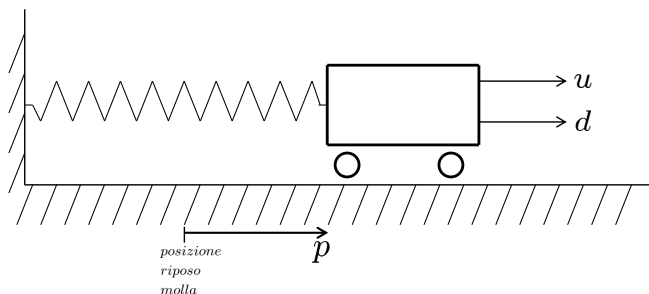


Figura 1: Carrello.

forza  $u$  e' la variabile di controllo e la forza  $d$  e' un disturbo; la massa del carrello ha valore unitario, la molla esercita un'azione di richiamo proporzionale a  $p$  con costante pari a 4 e il carrello si muove con attrito proporzionale alla velocita' con costante pari a 4.

3.1 Si scriva il modello in variabili di stato del sistema.

modello:

3.2 Si ricavino le funzioni di trasferimento  $P/U$  e  $P/D$ , dove  $P, U, D$  sono le trasformate di Laplace di  $p, u, d$ .

$$\frac{P}{U} = \quad , \quad \frac{P}{D} =$$

3.3 Si progetti un controllore  $C(s)$  che determina  $u$  a partire da  $p - p^0$ , dove  $p^0$  e' un valore di riferimento, in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- (i) quando  $d$  e' costante e la posizione di riferimento  $p^0$  e' pure costante, il carrello si porta a regime esattamente nella posizione desiderata  $p^0$ ;
- (ii) la costante di tempo dominante del sistema di controllo e'  $\tau \simeq 10$ ;
- (iii) il margine di fase soddisfa la condizione:  $\Phi_m \geq 70^\circ$ .

$C(s) =$

3.4 Il carrello e' inizialmente fermo nella posizione  $p = 0$ . Si disegni l'andamento approssimato di  $p$  nel grafico sottostante dove sono gia' riportati gli andamenti di  $p^0$  e di  $d$ .

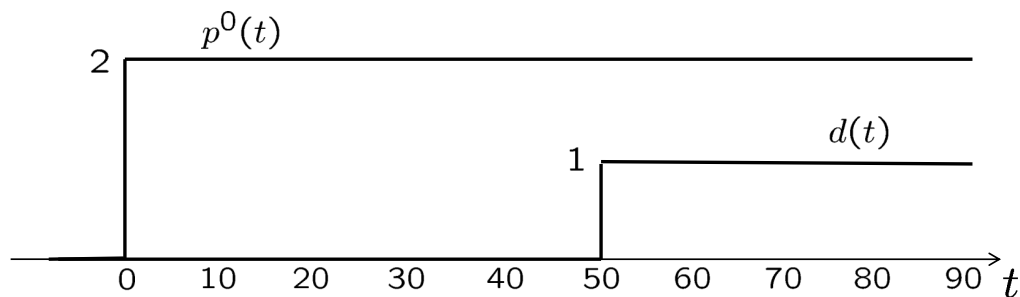


Figura 2: Andamento temporale del riferimento di posizione e del disturbo.

4. In relazione a un sistema lineare con matrici  $A, b, c$  si risponda alle domande che seguono.

4.1 Si dia una definizione di stato non osservabile.

4.2 Si dimostri che l'insieme degli stati non osservabili forma un sottospazio.

4.3 Si dica quale deve essere il sottospazio non osservabile affinché il sistema sia completamente osservabile.

4.4 Si dimostri la seguente affermazione: *se la matrice di stato  $A$  ha un autovettore ortogonale al vettore  $c^T$ , allora il sistema non è completamente osservabile.*